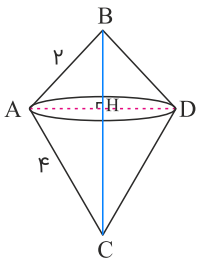




گزینه ۲

۱

باتوجه به شکل، جسم حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه حول وتر آن، دو مخروط قائم است که قاعده آنها به هم چسبیده‌اند.

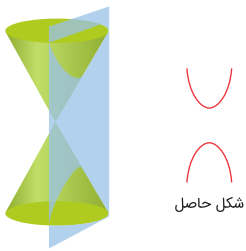


$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (r)^2 + (f)^2 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}$$

$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow 2 \times 4 = AH \times 2\sqrt{5} \Rightarrow AH = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

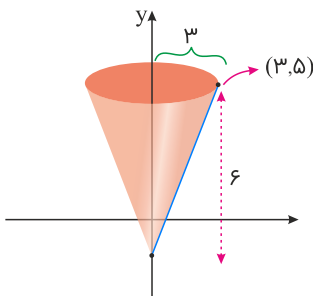
$$\begin{aligned} V_{\text{کل}} &= \frac{1}{3}\pi(AH)^2(BH) + \frac{1}{3}\pi(AH)^2(CH) = \frac{1}{3}\pi(AH)^2(BH + CH) \\ &= \frac{1}{3}\pi(AH)^2(BC) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2(2\sqrt{5}) = \frac{32\sqrt{5}}{15}\pi \end{aligned}$$

مقطع حاصل یک هذلولی است.



از دوران پاره خط داده شده حول محور y ها یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶ حاصل می شود.

می دانیم حجم مخروط برابر $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ است.



$$V = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 6 = 18\pi$$

دایره موردنظر را $C'(O', R')$ فرض می کنیم، پس $O'(-4, 0)$ حال داریم:

$$C : x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow O(-3, 1) , R = \sqrt{\frac{36 + 4 - 8}{4}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{دایره ها مماس داخل اند} \Rightarrow |OO'| = |R - R'|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-4 + 3)^2 + (0 - 1)^2} = |2\sqrt{2} - R'| \Rightarrow |2\sqrt{2} - R'| = \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} - R' = \pm\sqrt{2} \Rightarrow R' = \sqrt{2} \quad \text{یا} \quad R' = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{شعاع بزرگترین دایره} = 3\sqrt{2}$$

ابتدا با استفاده از معادله خط d ، محل برخورد این خط با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$3x - 4y - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{محل برخورد با محور } x \text{ ها: } N(4, 0) \\ \text{محل برخورد با محور } y \text{ ها: } M(0, -3) \end{cases}$$

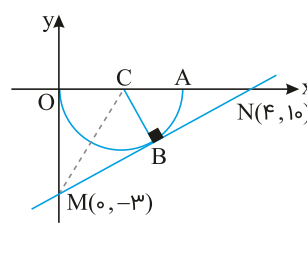
مطابق شکل زیر، حجم حاصل از دوران ناحیه سایه‌زده شده حول خط $y = 0$ ، یک مخروط با شعاع قاعده OM و ارتفاع ON است که یک کره با شعاع $OC = BC = r$ از آن جدا شده است، بنابراین برای محاسبه حجم ناحیه سایه‌زده باید ابتدا اندازه شعاع کره را به دست آوریم. در شکل زیر و در مثلث قائم‌الزاویه OMN بر اساس رابطه فیثاغورس داریم:

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 \Rightarrow MN = \sqrt{9 + 16} = 5$$

از طرفی دو مثلث MOC و MBC بنابر حالت (وتر و یک ضلع) هم‌نهشت هستند، بنابراین اجزای متناظر آن‌ها باهم برابر خواهد بود، پس:

$$OM = MB = 3$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه BCN داریم:



$$\begin{cases} BN = MN - MB \xrightarrow{MN=5, MB=3} BN = 5 - 3 = 2 \\ CN = ON - OC = 4 - r \\ BC = r \end{cases}$$

$$\Rightarrow CN^2 = BC^2 + BN^2 \Rightarrow (4 - r)^2 = r^2 + 4 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

حال حجم حاصل از دوران برابر است با:

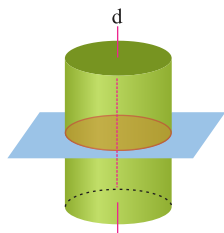
$$V = V_{\text{مخروط}} - V_{\text{کره}}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi(OM)^2 \times ON = \frac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12\pi$$

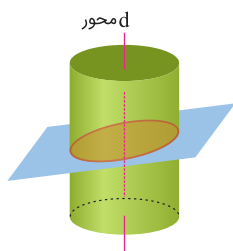
$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 4/5\pi$$

$$V = 12\pi - 4/5\pi = 7/5\pi$$

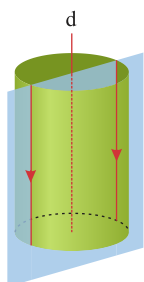
فصل مشترک یک صفحه با یک سطح استوانه‌ای به صورت‌های زیر است:
 (۱) اگر صفحه بر محور سطح استوانه‌ای عمود باشد، فصل مشترک، یک دایره است.



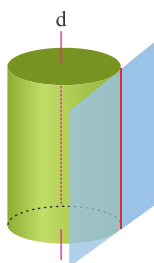
(۲) اگر صفحه بر محور سطح استوانه‌ای عمود نباشد و با آن موازی هم نباشد، فصل مشترک، یک بیضی است.



(۳) اگر صفحه با محور موازی باشد و سطح استوانه‌ای را قطع کند، فصل مشترک، دو خط موازی است.

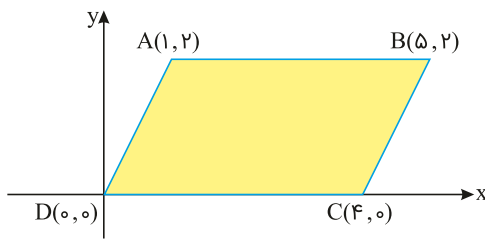


(۴) اگر صفحه با محور موازی و بر سطح استوانه‌ای مماس باشد، فصل مشترک، یک خط است.

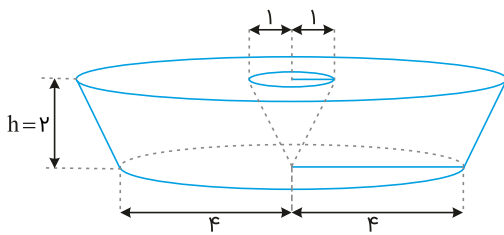


بنابراین فصل مشترک یک صفحه با یک سطح استوانه‌ای نمی‌تواند هذلولی باشد.

ابتدا متوازی‌الاضلاع ABCD را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

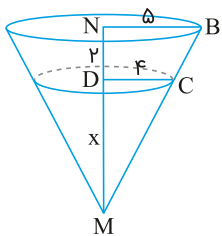


همان‌طور که در شکل زیر مشخص است، شکل حاصل از دوران، مخروط ناقصی است که یک مخروط از درون آن برداشته شده است و مخروط درونی، مخروطی به شعاع قاعده ۱ و ارتفاع ۲ واحد است، بنابراین داریم:



$$V_{\text{مخروط درونی}} = \frac{1}{3}(\pi r^2)h = \frac{1}{3}(\pi \times 1) \times 2 = \frac{2\pi}{3}$$

برای محاسبه حجم مخروط ناقص، مطابق شکل زیر ابتدا باید در مثلث BMN با استفاده از قضیه تالس مقدار x را محاسبه کنیم، پس:



$$\frac{MD}{MN} = \frac{CD}{BN} \Rightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 8$$

حال طبق شکل بالا داریم:

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}}$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = \left[\frac{1}{3}\pi(BN)^2 \times (MN) \right] - \left[\frac{1}{3}\pi(CD)^2 \times (MD) \right]$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = \left[\frac{1}{3}\pi(5)^2 \times (8+2) \right] - \left[\frac{1}{3}\pi(4)^2 \times (8) \right] = \frac{122\pi}{3}$$

در نهایت حجم حاصل از دوران متوازی‌الاضلاع ABCD حول محور y برابر است با:

$V = V_{\text{مخروط ناقص}} - V_{\text{مخروط درونی}}$

$$V = \frac{122\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 40\pi$$

گزینه ۲

۸

$$3AM - AN = 2(AM - AN + 1)$$

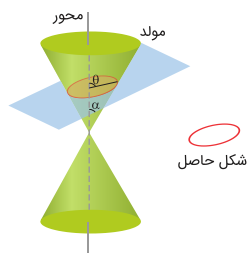
$$\Rightarrow 3AM - AN = 2AM - 2AN + 2 \Rightarrow AM + AN = 2$$

مجموع فواصل A از M و N (که فاصله‌شان برابر ۱ است) برابر مقدار ثابت ۲ شده است.

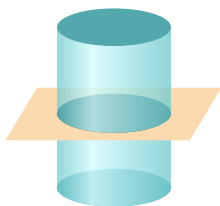
گزینه ۳

۹

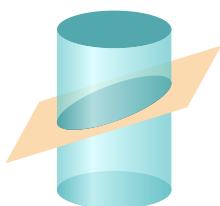
باتوجه به شکل زیر می‌دانیم اگر صفحه غیرموازی مولد و $90^\circ < \theta < \alpha$ باشد، سطح مقطع بیضی ظاهر می‌شود.



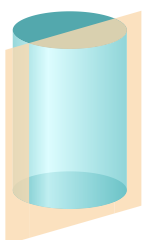
طبق شکل‌های زیر با توجه به وضع صفحه و استوانه حالات مختلفی برای سطح مقطع موردنظر به وجود می‌آید:
(۱) اگر صفحه با قاعده موازی باشد، شکل سطح مقطع، دایره است.



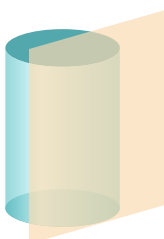
(۲) اگر صفحه به شکل مایل با استوانه برخورد کند، سطح مقطع به شکل بیضی است.

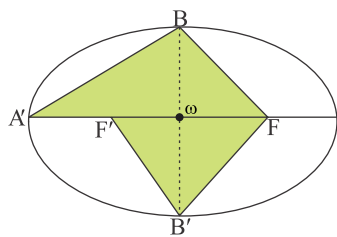


(۳) اگر صفحه به موازات محور استوانه باشد، سطح مقطع مستطیل خواهد بود.



(۴) اگر صفحه به موازات محور استوانه باشد و بر استوانه مماس باشد، سطح مقطع یک خط خواهد بود.





در این شکل دوتا مثلث وجود دارد که یکی مثلث $FF'B'$ که قاعده‌اش $|FF'|$ و ارتفاعش $|\omega B'|$ و دیگری مثلث $A'FB$ که قاعده‌اش $|A'F|$ و ارتفاعش $|\omega B|$ است؛ پس:

$$S_{FF'B'} = \frac{1}{2} |FF'| |\omega B'| = \frac{1}{2} \times 2c \times b = bc$$

$$S_{A'FB} = \frac{1}{2} |FA'| |\omega B| = \frac{1}{2} (a + c) b$$

$$AA' = 2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$FF' = 2c = 6\sqrt{3} \Rightarrow c = 3\sqrt{3}$$

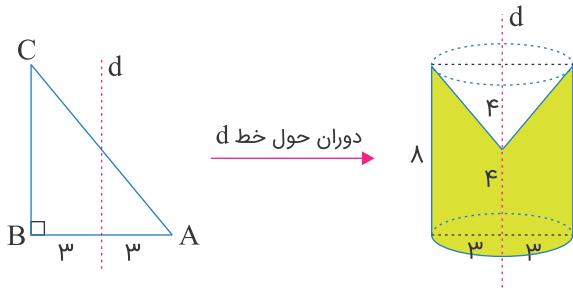
$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 27 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$\begin{aligned} S_{FF'B'} + S_{A'FB} &= bc + \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} bc = \frac{3}{2} bc + \frac{1}{2} ab \\ &= \frac{3}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = \frac{27}{2} \sqrt{3} + \frac{18}{2} = \frac{9}{2} (2 + \sqrt{27}) \end{aligned}$$

$$2c = 4\sqrt{5} \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$$

$$e = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow a = 6 \Rightarrow |BF| = 6$$

شکل حاصل، یک استوانه است که یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴ از آن برداشته شده است. پس حجم آن برابر است با:



$$V = \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h' = \pi \times 3^2 \times 4 - \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 4 = 72\pi - 12\pi = 60\pi$$

$$2(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 7 \xrightarrow{\div 2} (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{7}{2}$$

$$O(1,1) \quad , \quad R = \sqrt{\frac{7}{2}} \simeq 1/9$$

دو نقطه $F(1, 3)$ و $F'(1, -1)$ را کانون‌های بیضی در نظر می‌گیریم. در نتیجه بیضی به صورت قائم است.

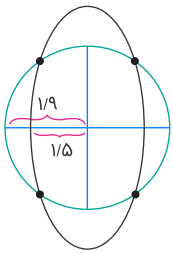
$$FF' = 3 - (-1) = 2c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$$

فرض کنیم نقطه M بر روی دایره قرار دارد. پس:

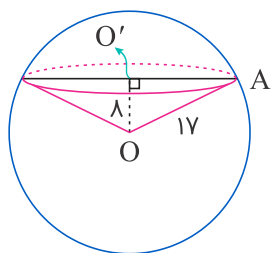
$$|MF| + |MF'| = 5 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2} = 2/5$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{2} = 1/5$$

حال شکل را رسم می‌کنیم:



باتوجه به شکل، دایره و بیضی ۴ نقطه تقاطع دارند.



بنا بر فرض $OO' = \lambda$ و $OA = ۱۷$ ، در نتیجه:

$$O'A^2 = OA^2 - OO'^2 = ۱۷^2 - \lambda^2 = ۱۵^2$$

$$\Rightarrow O'A = ۱۵$$

$$\Rightarrow \text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi(O'A)^2 \times OO' = \frac{1}{3}\pi \times ۱۵^2 \times \lambda = ۶۰۰\pi$$

$$C : (x - ۲)^2 + (y + ۱)^2 = ۴ \Rightarrow O(۲, -۱), R = ۲$$

$$C' : x^2 + y^2 - ۱۰x - ۶y + k = ۰ \Rightarrow O'(\omega, \varpi), R' = \sqrt{\omega^2 + \varpi^2 - k} = \sqrt{۳۴ - k}$$

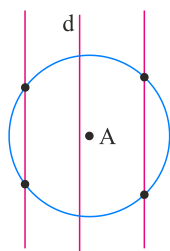
دو دایره مماس برون‌اند، پس:

$$OO' = R + R' \Rightarrow \sqrt{(۲ - \omega)^2 + (-۱ - \varpi)^2} = ۲ + \sqrt{۳۴ - k}$$

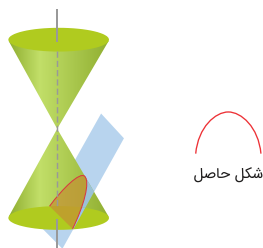
$$\Rightarrow ۲ + \sqrt{۳۴ - k} = \omega \Rightarrow \sqrt{۳۴ - k} = \varpi$$

$$\Rightarrow ۳۴ - k = ۹ \Rightarrow k = ۳۴ - ۹ = ۲۵$$

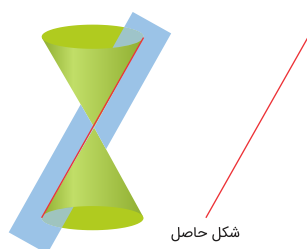
مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله معلوم k هستند یک دایره به مرکز A و شعاع k می‌باشد. از طرفی مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله k' هستند دو خط موازی با d است. محل تلاقی این دو خط موازی با دایره نقاط موردنظر هستند که تعداد آن‌ها حداکثر ۴ تا است.



دو حالت زیر را خواهیم داشت:
۱. اگر صفحه موردنظر از رأس مخروط نگذرد:

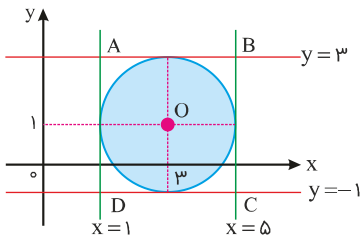


در این حالت سطح مقطع سهمی پدید می‌آید.
۲. اگر صفحه موردنظر از رأس مخروط بگذرد (شامل رأس مخروط باشد):



در این حالت شکل حاصل، خط مولدی است که صفحه ما با آن موازی است.

از برخورد چهار خط داده شده یک مربع حاصل می شود. مطابق شکل مرکز دایره وسط مربع ABCD است.



پس داریم:

$$\begin{cases} x_O = \frac{1+5}{2} = 3 \\ y_O = \frac{-1+3}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O(3, 1)$$

ازطرفی قطر دایره برابر با ضلع مربع است؛ درنتیجه $2R = 4$ و $R = 2$ خواهد بود؛ بنابراین معادله دایره به صورت $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ یا $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ است.

$$\frac{|AA'|}{|BB'|} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{2a}{2b} = \sqrt{5} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}}$$